Bruchgleichungen
Übung

1. Bestimmen Sie jeweils die größtmögliche Definitionsmenge und den Hauptnenner.

   a) $\frac{1}{x-5} = -\frac{2}{x+3}$; $G = \mathbb{R}$

   b) $\frac{x}{3} + 1 = \frac{2}{x}$; $G = \mathbb{Q}$

   c) $\frac{6}{x-2} - \frac{2}{x+2} = \frac{12}{x^2-4}$; $G = \mathbb{R}$

2. Prüfen Sie, ob folgende Werte die Ungleichung lösen.

   a) $x_1 = 2$ in $\frac{x-2}{2x+1} = \frac{x-2}{3x+1}$

   b) $x_1 = 7$ in $\frac{x-7}{x+1} = \frac{x+2}{x-7}$

   c) $x_1 = 0$ in $\frac{x^2-2x+5}{x+5} = 1$

3. Begründen Sie: Die Gleichung $\frac{x+a}{x+b} = \frac{x+c}{x+d}$ besitzt in ihrem Definitionsbereich dieselbe Lösungsmenge wie die Gleichung $(x+a)(x+d) = (x+c)(x+b)$.
   Die Werte von a, b, c, d sind dabei beliebige reelle Zahlen.

4. Bestimmen Sie die Definitionsmenge D und die Lösungsmenge L über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

   a) $\frac{x}{x+3} = \frac{x+3}{x}$

   b) $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+2}$

   c) $\frac{1}{x} = \frac{3}{x+4}$

   d) $\frac{5x-7}{2x+2} + \frac{x+2}{3x+3} = 0$

   e) $\frac{3x+2}{x-2} - \frac{x-5}{x+3} = \frac{2x^2+6x+20}{x^2+x-6}$

   f) $\frac{8x(x-2)}{2x-4} = 4x + 3$

   g) $\frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} = \frac{4-x^2}{x-x^2}$

   h) $\frac{2x-8}{x-1} + \frac{2x+6}{x-7} = 0$

   i) $\frac{2x-1}{3x-6} - \frac{4}{2x+6} = 1 + \frac{x-7}{(x-2)(x+3)}$

Bruchgleichungen
Lösung

1.
   a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 5\}$
      Hauptnenner $(x-5)(x+3)$

   b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
      Hauptnenner $3x$

   c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
      Hauptnenner $(x+2)(x-2) = x^2 - 4$

2.
   a) Ja
   b) Nein, $7 \notin D$
   c) Ja

3. Die Definitionsmenge der Gleichung ist $D = \mathbb{R} \setminus \{-b; -d\}$. Die gewünschte Gleichung ergibt sich durch Multiplikation der Gleichung mit den beiden Nennern. Da der linke Nenner auf die rechte Seite wandert und der rechte auf die linke, wird dieses verkürzte Verfahren auch **über Kreuz multiplizieren** genannt.

4.
   a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$
      $L = \{-1{,}5\}$

   b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$
      $L = \{0\}$

   c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 0\}$
      $L = \{2\}$

   d) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
      Es ergeben sich die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
      Wegen $x_1 = -1 \notin D$ ist $L = \{1\}$

   e) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$
      Hauptnenner $(x-2)(x+3) = x^2 - x + 6$
      Es ergibt sich $x_1 = 2 \notin D$, also $L = \emptyset$

   f) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
      $\frac{8x(x-2)}{2(x-2)} = 4x + 3$
      Hinweis: Mit $(x-2)$ kürzen!
      $4x = 4x + 3$ ergibt einen Widerspruch, damit ist $L = \emptyset$

g) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
$L = \{-3\}$

h) $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 7\}$;
Multiplikation mit den Nennern ergibt die quadratische Gleichung $2x^2 - 9x + 25 = 0$.
Diese quadratische Gleichung besitzt eine negative Diskriminante von $D = -119$,
folglich ist $L = \emptyset$.

i) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$
Hauptnenner $6(x-2)(x+3)$
Die entstehende Gleichung $x^2 - 7x - 48$ besitzt die Lösungsmenge
$L = \left\{\frac{-7-\sqrt{241}}{2}; \frac{-7+\sqrt{241}}{2}\right\}$.